Conférence de Roland Charnay : « Y a un problème au cycle 3 ? »
Comprendre les difficultés des élèves en mathématiques pour les prendre en compte
Congrès SNUipp – UHA site du Grillenbreit, Colmar – 6 novembre 2014

A. CONSTAT DES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

- En résolution de problèmes, **lorsque l'école fait apprendre par répétition des techniques non comprises, elle rend les élèves inaptes à résoudre ces problèmes**. En témoigne la réaction souvent hostile de beaucoup d'adultes dès lors que l'on évoque la fameuse « règle de trois », souvent associée au souvenir d'un passé scolaire synonyme de blocage.

> *Exemple : 4 stylos coûtent 2,42€. Combien coûtent 14 stylos.*
> *Diverses stratégies de résolution sont possibles, qui peuvent coexister avec la très normative « règle de trois ». Par exemple, si 4 stylos coûtent 2,42€, alors 2 stylos coûtent 1,21€, dont les 14 stylos coûtent 8,47€.*

- En résolution de problèmes, **les erreurs des élèves cachent bien souvent d'authentiques compétences**.

> *Exemple : Julie a acheté deux livres à 8€ chaque, quatre BD à 6€ chacune et un dictionnaire. Elle paye 56€. Quel est le prix du dictionnaire ?*
>
> *Réponse élève : 8€ x 6€ = 54€. Le prix du dictionnaire est 2€, car 56 - 54 = 2.*
> *Analyse :*
> - *La multiplication : l'élève cherche le prix du lot « livre et BD », puis calcule le complément. Il a donc compris ce qu'il doit calculer pour trouver ce qui reste à payer. Sa stratégie analytique est correcte, même si sa stratégie arithmétique est erronée.*
> - *Le calcul mental : le résultat montre que l'apprentissage des tables de multiplication est une difficulté majeure, pour cet élève comme pour beaucoup d'autres.*
> - *Le choix des termes du produit (8 et 6) : il procède d'habitudes de lecture. Résoudre un problème mathématique, pour cet élève, consiste à sélectionner et à associer dans des calculs les nombres écrits en chiffres. Implicitement, les nombres écrits en lettres n'ont pas de vocation mathématique. De plus, les nombres écrits en chiffres (8 et 6) sont tous deux accompagnés des termes « chaque » et « chacun », qui induisent une stratégie multiplicative.*

- En résolution de problèmes, **le raisonnement des élèves n'est pas seulement orienté par leurs connaissances mathématiques, mais également et surtout par leurs habitudes construites sur les procédures efficaces**.

- En résolution de problèmes, **bien souvent l'élève répond non pas à la question posée, mais bien à la personne qui la pose**, c'est-à-dire en émettant des hypothèses sur la réponse attendue par la personne qui a posé la question. C'est le fameux écueil des injonctions du type « Réponds-**moi** à cette question. » Cela engage les enseignants à affiner certains gestes professionnels.

- En résolution de problèmes, **la stratégie des élèves est bien souvent guidée par l'idée que tout calcul engagé débouche nécessairement sur un résultat qui est lui-même une étape vers la réponse finale**.

> *Exemple : Dans la tirelire de Sophie, il n'y a que des pièces de 2€ et des billets de 5€. Il y a au total 32 pièces et billets. La tirelire compte 97€. Combien contient-elle de pièces de 2€ et de billets de 5€ ?*
> *Analyse : Ce problème est difficile pour beaucoup d'élèves car il requiert que l'on leur apprenne à essayer. La résolution ne peut être ici que de type déductif, par un calcul ou une chaîne de calculs. L'idée que l'on peut faire un essai (une hypothèse sur la réponse) puis un autre, qui fassent progressivement s'approcher de la réponse, n'est pas envisageable. C'est un problème de contrat didactique, mais également d'enseignement de ce type de stratégie (des « problèmes pour chercher »).*

DONNÉES FOURNIES PAR L'ENQUÊTE PISA

La dernière enquête PISA ne révèle pas de chute significative des résultats globaux en mathématiques des élèves français (-3% par rapport à la précédente évaluation PISA). Par ailleurs les origines de cette chute sont probablement multifactorielles (la dégradation des conditions sociales des familles ne peut être laissée hors du champ explicatif). On relève néanmoins :

- Une augmentation significative du nombre d'élèves en grande difficulté
- Un accroissement des écarts entre les élèves les plus performants et ceux qui sont les plus fragiles.

On peut par ailleurs noter une triple spécificité française, du point de vue du rapport que les élèves entretiennent avec les mathématiques :

- **Manque de confiance en soi** : 43% déclarent se sentir perdus face à un problème (30% en moyenne dans les pays de l'OCDE)

- **Manque de persévérance** : un élève sur deux abandonne rapidement face à un problème à résoudre. Les élèves français sont premiers dans l'OCDE pour les non-réponses,
  - parce qu'ils ne sont pas habitués à rencontrer des problèmes inédits
  - parce qu'ils savent que PISA, « c'est pas payé », « ça compte pas pour la moyenne », il n'y a pas de note à la fin, donc pas de réel enjeu. En France, l'évaluation a davantage une dimension *normative* qu'une dimension *formative*.

- **Anxiété face à l'évaluation**

Données 2003	France	Finlande	Pays-Bas
« Je suis très tendu quand j'ai un devoir à faire »	53%	7%	7%
« Je m'inquiète à l'idée d'avoir des mauvaises notes »	75%	51%	44%

Les enquêtes PISA classent les 65 pays suivant trois catégories de problèmes

- *Mathématiques lexicales* (questions de cours) : la France est en 6^{e} position. Les élèves français ont des connaissances.
- *Mathématiques appliquées* (problèmes de la vie courante) : la France est en 18^{e} position
- *Mathématiques formelles* (recherche, problèmes atypiques) : la France est en 27^{e} position

« Lorsqu'il est demandé aux élèves une prise d'initiative (essais à faire), la réussite est relativement faible. » (Rapport de la DEPP, avril 2013)

B. PISTES DE TRAVAIL

1. EN CALCUL MENTAL, FAVORISER LA MÉMORISATION DES RÉPERTOIRES ADDITIF ET MULTIPLICATIF

C'est l'un des obstacles auxquels sont particulièrement confrontés les élèves les plus fragiles.

Evaluation 6^{e} en 2005 (derniers résultats nationaux publiés par item)

- *Le **domaine additif** est assez bien maîtrisé, avec des faiblesses :*
  - *Plus de 90% des élèves maîtrisent le répertoire additif*
  - *Mais : 25 + ? = 100 → 72%   37 + 99 = ? → 64%   43 + ? = 100 → 63%*

- *Le **domaine multiplicatif** (qui est le plus important car c'est celui qui sera le plus sollicité : il intervient dans la proportionnalité, la simplification des fractions, la factorisation…) : il est mal maîtrisé*
  - *6x8 → 69%   9x9 → 88%   5X ? = 35 → 81 %   9x ?=27 → 75%   8X ? = 56 → 54%*
  - *Calcul réfléchi : 25x4 → 71%   60 :4 → 40%   15x ? = 45 → 71%*
  - *Techniques opératoires relatives à la multiplication : 876 X 34 → 47%*

    Analyse des erreurs : Erreurs dues au décalage (mais pas aux tables) → 2%
    Erreurs dues aux tables (mais pas au décalage) → 25%

C'est bien le calcul mental qui est le plus important à consolider, et non le calcul posé.
Un adulte lambda, confronté à une situation multiplicative, se trouve dans la situation de choisir de manière pragmatique entre le calcul mental et le recours à la calculatrice. Il s'agit de s'interroger sur la nécessité de continuer ou non à passer autant de temps à enseigner la multiplication posée ou la division posée avec une potence. **Leur utilité est bien de permettre aux élèves de comprendre les relations entre les nombres et les propriétés des opérations, mais assurément pas de trouver efficacement le résultat de l'opération**. Il faut insister sur le **raisonnement** bien plus que sur l'installation des **automatismes**.
Roland Charnay estime que l'enseignement des opérations posées a été introduit de façon trop précoce dans les programmes 2008 (fin CE1 pour la soustraction posée, fin CE2 pour la division posée).

Par ailleurs, de l'école à l'université, à chaque fois que l'on introduit l'apprentissage d'une nouvelle notion mathématique, on utilise toujours des petits nombres (inférieurs à 25) comme supports. C'est donc bien le calcul mental qu'il s'agit d'automatiser pour permettre de se concentrer sur les notions nouvelles.

« Certaines compétences en mathématiques et principalement les habiletés en calcul mental sont fortement explicatives du niveau global d'acquisition des élèves et de son évolution au fil des années. (…) A ce titre, la pratique d'activités systématiques et variées dans le domaine du calcul mental ne sont sans doute pas à négliger, ce qui pourrait permettre de réduire le coût cognitif des activités des apprentissages en automatisant les acquisitions. »

La mémorisation des répertoires additif et multiplicatif n'est complète que si l'élève est capable de donner immédiatement :
- Des sommes et des produits (7x8)
- Des différences et des quotients (56 :8 = ?)
- Des compléments et des facteurs (combien de fois 7 dans 56 ?)
- Des décompositions (combien de fois 7 dans 59 ?)

Pour mieux mémoriser il faut d'abord **comprendre** (référence, contrôle)
- Addition sous le double aspect
  - Cardinal : réunion ou augmentation de quantités
  - Ordinal : avancer sur une piste numérotée
- Multiplication sous un triple aspect (produit, multiplié par, fois)
  - Itération des quantités, en lien avec une addition itérée
  - Organisation « rectangulaire » de quantités (4x3, c'est un quadrillage de 4 colonnes et 3 lignes). Cette organisation est particulièrement facilitante pour faire comprendre la commutativité de la multiplication.
  - Addition réitérée (fois)

    Le terme « fois » est le plus signifiant. 12 fois 25, c'est pareil que 12 paquets de 25, je peux donc visualiser (le langage le plus mathématique « produit » n'a pas de lisibilité pour les élèves en situation de stratégie multiplicative)

On mémorise bien mieux **ce qui est structuré** (ce qui est en lien) que ce qui relève de mots éclatés : quels **points d'appui** pour retrouver et contrôler un résultat ?
- Utiliser la commutativité (installer très vite dans l'esprit des élèves que quand je connais 9+2, je connais aussi 2+9).
- **S'appuyer sur des régularités ou des propriétés**
  - Ajouter ou soustraire 1, c'est dire le suivant ou le précédent (il s'agit d'installer prioritairement cette notion au CP, beaucoup d'élèves n'en ayant pas conscience)
  - De 3 en 3 dans la table de 3…
  - Alternance de 0 et de 5 dans la table de 5
- **S'appuyer sur des résultats connus**
  - Doubles, compléments à 10… : travailler dans une classe au bénéfice des deux catégories d'élèves : les 'mémorisants' complets ou partiels (qui recourent plus ou moins aux

automatismes de type « pavlovien » : 7+6 = 13) et les reconstructeurs partiels (automatisme : 7+6 = 2x6 +1)
  - Carrés tables de 2 et de 5
  - Déduire un résultat à partir des résultats voisins

La mémorisation nécessite des étapes

- Par *zones numériques* pour l'**addition**

Cf. proposition de Christophe BOLSIUS dans son ouvrage *Fort en calcul mental*, Sceren/CRDP Lorraine

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- Par *tables* pour la **multiplication**, dans un ordre de complexité croissante :
  - Tables de 2 et de 5 (les plus simples)
  - Tables de 4 et de 8 (doubles à partir de celles de 2)
  - Tables de 3 et de 6
  - Tables de 9 avec ses particularités (la somme des deux chiffres est 9)
  - Table de 7 (ne reste plus à apprendre que 7x7)
  - Associer toujours : « combien de fois », « produit », …

Plus on avance dans l'apprentissage des tables et moins l'on a de résultats à apprendre si l'on fait jouer le principe de commutativité (3x7 c'est comme 7x3).

En calcul réfléchi il y a toujours plusieurs stratégies possibles : éviter d'enseigner des stratégies stéréotypées.

- Diversité des stratégies personnelles à faire coexister dans la classe
- Raisonnement : choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure
  - Explicitation et confrontation des procédures
  - Capacité à changer de procédures selon les nombres
  - Mise en évidence des procédures utilisées

L'usage de la **calculatrice** est à préconiser le plus tôt possible, non pas seulement comme outil mais également comme support (ex : j'affiche 47,9 à l'écran. Comment faire en sorte qu'en trois additions successives, j'affiche 64,2 ?)

2. OUVRIR LE CHAMP DES POSSIBLES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Distinguer **trois grandes catégories de problèmes**

- Les problèmes « de base », ceux qu'on sait résoudre immédiatement (les briques)
- Les problèmes « complexes » ou « à étapes », qu'on peut résoudre en le décomposant en « problèmes de base »
- Les problèmes atypiques qui nécessitent une investigation

Attention : un problème n'est pas a priori dans une catégorie, Cela dépend des connaissances de chacun.

- Une piste : **les problèmes ouverts (atypiques)**

Apprendre aux élèves à chercher, en leur disant que « chercher » est un mot à double sens : à certaines étapes de la scolarité, c'est chercher dans sa mémoire (« dans sa tête »), à d'autres c'est chercher « avec sa tête » (ce second sens du mot chercher est souvent inconnu des élèves).

Utilisation de problèmes ouverts :

  - Simples dans leur compréhension
  - Proposant un défi aux élèves (résolution experte non disponible)
  - Exemple : Quand ils réunissent leurs chocolats, Nicolas et Lili ont 60 chocolats. Mais le nombre de chocolats de Nicolas n'est que le quart du nombre de chocolats de Lili. Combien Nicolas a-t-il de chocolats ?
    - Résolution possible par déduction
    - Résolution possible par essais de réponses et ajustement.

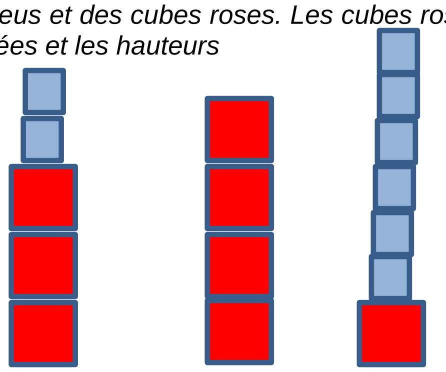
- Une autre piste : **étendre le champ des stratégies possibles**

Il existe plusieurs stratégies parmi lesquelles l'élève doit pouvoir choisir pour affronter un problème. L'élève ne les connaît pas a priori. Il faut donc concevoir des situations qui vont lui permettre de se les approprier.

  - Stratégie « descendante » (à partir de ce qu'on m'indique, qu'est-ce que je peux trouver de nouveau)
  - Stratégie « remontante » (qu'est-ce qu'il faudrait que je connaisse pour répondre à la question posée ?)

Exemple : Juju a réalisé des tours avec des cubes bleus et des cubes roses. Les cubes roses sont plus gros que les cubes bleus. Voici les trois tours qu'il a réalisées et les hauteurs des tours A et B. Quelle est la hauteur de la tour C ?

A : 3 rouges et 2 bleus : 27 cm
B : 4 rouges : 24 cm
C : 1 rouge et 6 bleus : ?



A : 27 cm B : 24 cm C : ?

- Dès la fin du cycle 2, mettre en place la **stratégie par essais et ajustements**

CAP Maths CM1 : Quand ils réunissent leurs chocolats, Nicolas et Lili ont 60 chocolats. Mais le nombre de chocolats de Nicolas n'est que le quart du nombre de chocolats de Lili.

Stratégie efficace par tâtonnements successifs
Nicolas : 5, Lili 20 : Total 25. C'est donc plus
Nicolas 10, Lili 40/ Total50. C'est donc un peu plus…

- Prévoir des activités qui mettent en œuvre **une étude exhaustive des cas possibles**.

Cap Maths CM2 :
Le jardinier décide de changer sa façon de planter les choux. Désormais il plante tous les choux en faisant deux carrés. Par exemple, avec une barquette de 13 choux, il peut réaliser cette disposition : un carré avec 4 choux, un carré avec 9 choux.

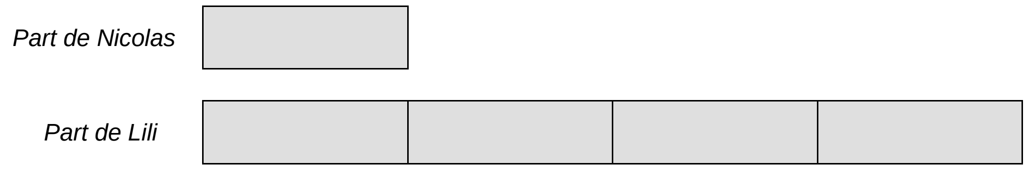
1. *Le jardinier peut-il planter 20 choux en faisant deux carrés ?*
2. *Le jardinier peut-il planter 45 choux en faisant deux carrés ?*

Analyse : L'enjeu n'est pas ici forcément que les élèves réussissent du premier coup, mais c'est bien de les mettre en situation de recherche (leur apprendre une nouvelle stratégie, et non pas vérifier qu'ils savent bien le faire.)

Côté	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Carré	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*

Obtenir 20 ou 45 en ajoutant 2 résultats.
Ou bien : calculer toutes les sommes de « carrés » et observer si on a obtenu 20 ou 45 (ce qui assure l'unicité ou non des réponses).

- Inviter au **changement de cadre** (souvent en en passant par la schématisation)



- En passer par la **généralisation**

Exemple : 30 personnes dans un groupe, combien de poignées de mains ?

Stratégie de résolution :
- *Recherche avec 4 personnes (comptage effectif) : 6 poignées de main*
- *Recherche avec 5 personnes (changement de cadre) : représentation graphique avec des points représentant les personnes et des segments représentant les poignées de mains*
  Réponse : 10 poignées de main
- *Recherche avec 7 personnes (changement de cadre, avec schéma)*
  Organisation rationnelle du schéma : je comprends que pour 7, il faut faire 6+5+4+3+2+1
- *Généralisation pour 30 (y a-t-il des raccourcis possibles pour éviter de calculer 29+28+27+26+…+2+1 ?)*

CONCLUSION

Aborder des problèmes mathématiques ne devrait pas se résumer à proposer aux élèves des énoncés écrits. Une situation vécue, un problème énoncé à l'oral peuvent tout autant faire l'affaire, et centrer l'activité cognitive des élèves sur une dimension mathématique (beaucoup d'élèves sont en difficulté en mathématiques pour des raisons qui touchent prioritairement à leurs difficultés en lecture).
Varier les types de problèmes :
- A partir de données réelles
- A partir de données représentées
- A partir d'énoncés où ne figurent que les données
- A partir d'énoncés plus compliqués

Un problème complexe n'est pas nécessairement un problème dont l'énoncé est compliqué.

En mathématiques plus qu'ailleurs, quand on perd le fil de la compréhension, on perd la capacité à continuer à apprendre. Donc à l'égard des élèves les plus en difficulté, il y a une erreur pédagogique majeure : celle qui consisterait à penser qu'il faut lui assurer l'apprentissage des mécanismes, et que l'abord des stratégies peut être laissé de côté.

Notes : RR / DT